ÉQUIVALENCES LOGARITHMIQUES

Certaines équivalences permettent d'effectuer des opérations qui font intervenir des logarithmes. Pour c, d et m supérieurs à 0, $c \neq 1$ et $d \neq 1$, on a :

Équivalence	Exemple
Logarithme d'une puissance $\log_c m^n = n \log_c m$	$\log_2 16^{3,5} = 3,5 \log_2 16 = 3,5 \times 4 = 14$
Changement de base $\log_c m = \frac{\log_d m}{\log_d c}$	$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1,5$

L'équivalence du changement de base permet de calculer le logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION EXPONENTIELLE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une équation exponentielle à une variable en exprimant chacun des deux membres de l'équation dans une même base. De l'égalité des bases, on peut alors déduire l'égalité des exposants et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Ex. : $2^{3x} = 64$
$$2^{3x} = 2^6$$
$$\Downarrow$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Il est aussi possible de résoudre une équation exponentielle à une variable de la façon suivante.

	Ex. : 1) Résoudre : $3(2)^x - 1 = 14$	2) Déterminer le zéro de la fonction : $f(x) = \text{-}2e^x + 90$
1. Obtenir une équation dans laquelle la base affectée de l'exposant qui comporte la variable est isolée. Noter que la résolution ne peut se poursuivre que si le membre formé du terme constant est positif.	$3(2)^x - 1 = 14$ $3(2)^x = 15$ $2^x = 5$	$\text{-}2e^x + 90 = 0$ $\text{-}2e^x = \text{-}90$ $e^x = 45$
2. Passer de la forme d'écriture exponentielle à la forme d'écriture logarithmique et résoudre l'équation ainsi obtenue.	$2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5$ $x = \frac{\log 5}{\log 2}$ $x \approx 2,32$	$e^x = 45 \Leftrightarrow x = \ln 45$ $x \approx 3,81$

Nom : ______________________

Groupe : ____________ Date : __________

Certaines équivalences logarithmiques permettent de résoudre des équations qui font intervenir plusieurs expressions exponentielles.

Ex. : 1) Résoudre : $7^{2x-1} = 10^x$

$$7^{2x-1} = 10^x$$

$$\frac{7^{2x}}{7} = 10^x$$

$$7^{2x} = 7(10^x)$$

$$\frac{7^{2x}}{10^x} = 7$$

$$\left(\frac{7^2}{10}\right)^x = 7$$

$$\left(\frac{49}{10}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{49}{10}}7$$

$$x \approx 1{,}22$$

2) Résoudre : $3^{15x+9} = 5^{7x}$

$$3^{15x+9} = 5^{7x} \Leftrightarrow 15x + 9 = \log_3 5^{7x}$$

$$15x + 9 = 7x\log_3 5$$

$$15x = 7x\log_3 5 - 9$$

$$15x - 7x\log_3 5 = -9$$

$$x(15 - 7\log_3 5) = -9$$

$$x = \frac{-9}{15 - 7\log_3 5}$$

$$x \approx -1{,}90$$

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION LOGARITHMIQUE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une équation logarithmique à une variable de la façon suivante.

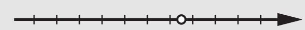
	Ex. : 1) Résoudre : $2\log 5x = 4$	2) Déterminer le zéro de la fonction : $f(x) = 0{,}5\log_2(x + 7) - 3$
1. Obtenir une équation dans laquelle le logarithme est isolé.	$2\log 5x = 4$ $\log 5x = 2$	$0{,}5\log_2(x + 7) - 3 = 0$ $0{,}5\log_2(x + 7) = 3$ $\log_2(x + 7) = 6$
2. Passer de la forme d'écriture logarithmique à la forme d'écriture exponentielle et résoudre l'équation ainsi obtenue.	$\log 5x = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 5x$ $100 = 5x$ $x = 20$	$\log_2(x + 7) = 6 \Leftrightarrow 2^6 = x + 7$ $64 = x + 7$ $x = 57$

Nom : ______________________________

Groupe : ______________ Date : ___________

RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION EXPONENTIELLE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une inéquation exponentielle à une variable de la façon suivante.

1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.	Ex. : L'équation associée à l'inéquation $3(4)^{2x} < 192$ est $3(4)^{2x} = 192$.
2. Résoudre l'équation.	$3(4)^{2x} = 192$ $4^{2x} = 64$ $4^{2x} = 64 \Leftrightarrow \log_4 64 = 2x$ $x = 0{,}5 \log_4 64$ $x = 0{,}5 \frac{\log 64}{\log 4}$ $x = 1{,}5$
3. Représenter la solution sur une droite numérique par un point plein ou vide selon que l'équation fait partie ou non de l'inéquation.	
4. Déduire l'ensemble-solution de l'inéquation.	Sur la droite numérique, les nombres inférieurs à 1,5 vérifient l'inéquation. L'ensemble-solution est : $x < 1{,}5$ 

RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION LOGARITHMIQUE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une inéquation logarithmique à une variable de la façon suivante.

1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.	Ex. : L'équation associée à l'inéquation $-18 \log_9 -4x \geq -9$ est $-18 \log_9 -4x = -9$.
2. Résoudre l'équation.	$-18 \log_9 -4x = -9$ $\log_9 -4x = 0{,}5$ $\log_9 -4x = 0{,}5 \Leftrightarrow 9^{0{,}5} = -4x$ $3 = -4x$ $x = -0{,}75$
3. Déduire l'ensemble-solution de l'inéquation en tenant compte de la restriction de positivité de l'argument.	L'argument d'un logarithme devant être supérieur à 0, on a : $-4x > 0$ $x < 0$ Sur la droite numérique, les nombres supérieurs ou égaux à $-0{,}75$ et inférieurs à 0 vérifient l'inéquation. L'ensemble-solution est : $-0{,}75 \leq x < 0$