Nom : ____________________

Groupe : ____________ Date : ____________

Manuel de l'élève, volume 2, p. 43

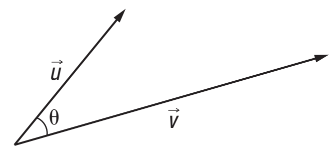
PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

Le **produit scalaire** est une opération qui fait intervenir deux vecteurs dont le résultat est un scalaire. Le produit scalaire des vecteurs *u* et *v* se note $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et se lit « $\vec{u}$ produit scalaire $\vec{v}$ ».

Constructions géométriques

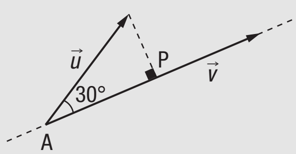
Le nombre qui correspond au produit scalaire de deux vecteurs *u* et *v* est donné par :

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, où θ correspond à la mesure de l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



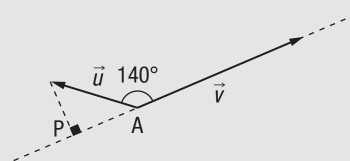
Géométriquement, ce nombre correspond à la **longueur orientée** de la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite qui supporte $\vec{v}$ multipliée par la norme de $\vec{v}$.

Ex. : 1) $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 6{,}5$



$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= \text{m } \overline{AP} \times \|\vec{v}\| \\ &= \|\vec{u}\| \times \cos 30° \times \|\vec{v}\| \\ &= 5 \times \cos 30° \times 6{,}5 \\ &\approx 28{,}15\end{aligned}$$

2) $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$



$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= -\text{m } \overline{AP} \times \|\vec{v}\|, \text{ car } \overline{AP} \text{ n'est pas orienté selon } \vec{v}. \\ &= \|\vec{u}\| \times \cos 140° \times \|\vec{v}\| \\ &= 2 \times \cos 140° \times 5 \\ &\approx -7{,}66\end{aligned}$$

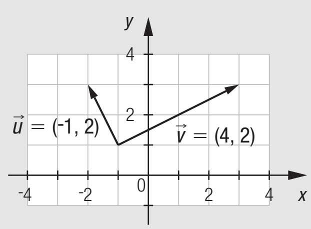
Manipulations algébriques

Le nombre qui correspond au produit scalaire d'un vecteur *u* dont les composantes sont (*a*, *b*) et d'un vecteur *v* dont les composantes sont (*c*, *d*) est donné par : $\vec{u} \bullet \vec{v} = ac + bd$

Ex. : 1) $\vec{u} = (5, 1)$ et $\vec{v} = (-2, 7)$

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= 5 \times -2 + 1 \times 7 \\ &= -3\end{aligned}$$

2)



$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= (-1, 2) \bullet (4, 2) \\ &= -1 \times 4 + 2 \times 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Puisque $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs possède les propriétés suivantes.

- Commutativité
- Associativité des scalaires
- Distributivité sur une somme vectorielle

Ex. : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
Ex. : $k_1\vec{u} \bullet k_2\vec{v} = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$
Ex. : $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$