Nom : ______________________________

Groupe : ______________ Date : ____________

Manuel de l'élève, volume 2, p. 32

ADDITION ET SOUSTRACTION DE VECTEURS

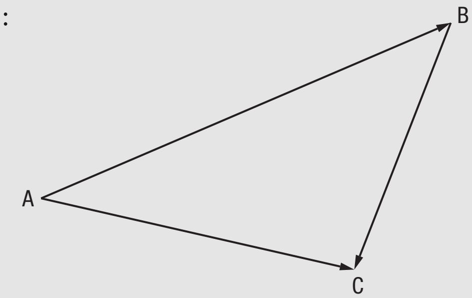
Il est possible d'additionner et de soustraire des vecteurs entre eux. Il en résulte un vecteur. Soustraire un vecteur revient à additionner le vecteur opposé.

La relation de Chasles

La relation de Chasles stipule que si A, B et C sont trois points du plan, alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Ex. :



Constructions géométriques

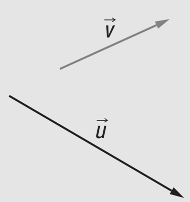
Lorsque des vecteurs sont représentés dans un plan, il est possible de déterminer géométriquement la somme de ces vecteurs en les plaçant bout à bout. Le vecteur résultant de la somme est alors défini par l'origine du premier vecteur et par l'extrémité du dernier vecteur.

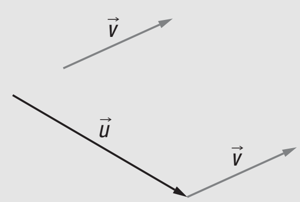
Ex. :

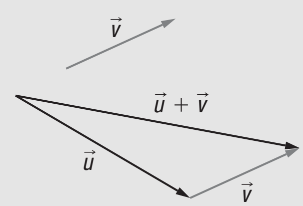
1) On veut représenter $\vec{u} + \vec{v}$.

On reproduit le vecteur *v* de façon à ce que son origine coïncide avec l'extrémité du vecteur *u*.

Le vecteur somme est défini par l'origine du vecteur *u* et l'extrémité du vecteur *v*.



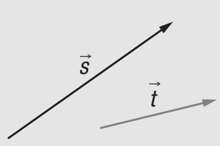


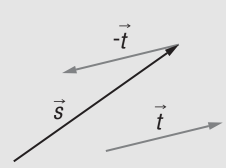


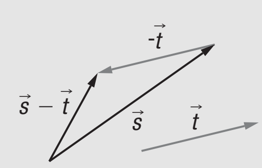
2) On veut représenter $\vec{s} - \vec{t}$.

On représente le vecteur opposé au vecteur *t* de façon à ce que son origine coïncide avec l'extrémité du vecteur *s*.

Le vecteur somme est défini par l'origine du vecteur *s* et l'extrémité du vecteur *-t*.

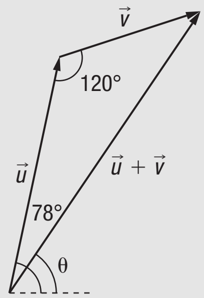






Certaines relations métriques et trigonométriques dans les triangles permettent de déterminer la norme et l'orientation d'un vecteur somme.

Ex. :



Dans l'illustration ci-contre, $\|\vec{u}\| = 6$ et $\|\vec{v}\| = 4$.

- Par la loi des cosinus :
  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \cos 120°}$, soit $\approx 8,72$.
- Par la loi des sinus :
  $\theta \approx 78° - \text{arc sin } \frac{4 \times \sin 120°}{8,72}$, soit $\approx 54,59°$.

Manipulations algébriques

Pour $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, les relations suivantes permettent de calculer les composantes du vecteur résultant de la somme ou de la différence de ces deux vecteurs.

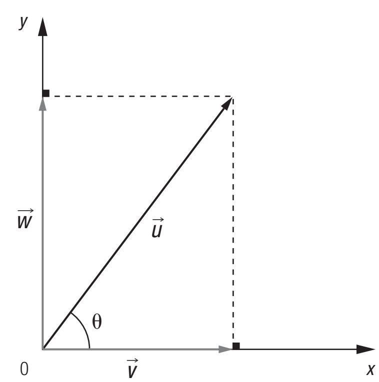
$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

Ex. : Si $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 5)$, alors :

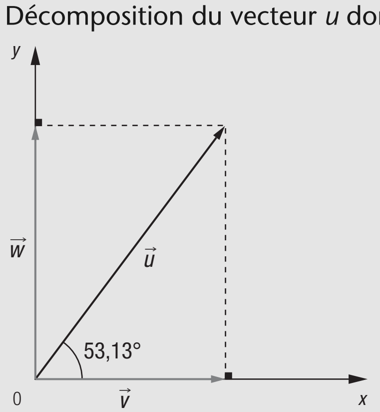
- $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (-1, 5) = (2 + -1, 3 + 5) = (1, 8)$
- $\vec{u} - \vec{v} = (2, 3) - (-1, 5) = (2 - -1, 3 - 5) = (3, -2)$

Décomposition de vecteurs dans le plan cartésien

Un vecteur *u* peut-être décomposé en une somme d'un vecteur horizontal et d'un vecteur vertical. Graphiquement, le vecteur horizontal et le vecteur vertical correspondent aux projections orthogonales du vecteur *u* sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.



Ex. : Décomposition du vecteur *u* dont la norme est 5 :



- $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les projections de $\vec{u}$ sur les axes.
- $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
- $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cos 53,13° = 5 \cos 53,13°$, soit ≈ 3.
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \sin 53,13° = 5 \sin 53,13°$, soit ≈ 4.
- Les normes des vecteurs *v* et *w* correspondent aux composantes de $\vec{u}$. On a donc $\vec{u} \approx (3, 4)$.

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN SCALAIRE

Additionner un vecteur à lui-même un certain nombre de fois revient à multiplier ce vecteur par un scalaire.

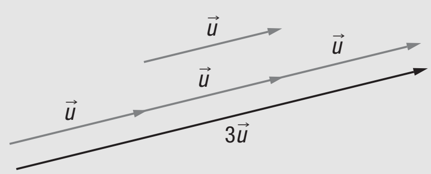
$$\underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \ldots + \vec{u}}_{k \text{ fois}} = k\vec{u}$$

On convient que $1\vec{u} = \vec{u}$, $-1\vec{u} = -\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$ et $k\vec{0} = \vec{0}$.

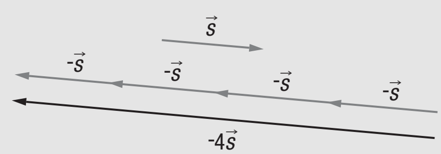
Constructions géométriques

Il est possible de représenter géométriquement la multiplication d'un vecteur par un scalaire en additionnant ce vecteur à lui-même autant de fois que nécessaire.

Ex. : 1) On veut représenter $3\vec{u}$:



2) On veut représenter $-4\vec{s}$:



Manipulations algébriques

Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chacune des composantes de ce vecteur par ce scalaire.

Si $\vec{u} = (a, b)$, alors $k\vec{u} = k(a, b) = (ka, kb)$

Ex. : Si $\vec{u} = (2, -4)$, alors $4\vec{u} = (4 \times 2, 4 \times -4) = (8, -16)$.

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

L'addition de vecteurs possède les propriétés suivantes.

Propriété	Énoncé
Commutativité	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
Associativité	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire possède les propriétés suivantes.

Propriété	Énoncé
Associativité	$(k_1k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$
Distributivité sur l'addition de vecteurs	$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
Distributivité sur l'addition de scalaires	$(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$

