FACTORISATION : COMPLÉTION DU CARRÉ

Il existe diverses méthodes pour factoriser une expression algébrique de la forme $ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, dont la **complétion du carré.** Cette méthode consiste à :

1. si $a \neq 1$, écrire l'expression algébrique sous la forme $a(x^2 + bx + c)$;	Ex. : $2x^2 + 16x + 14$ $2(x^2 + 8x + 7)$
2. établir un carré parfait en ajoutant et en soustrayant au trinôme le nombre correspondant à l'expression $\left(\frac{b}{2}\right)^2$;	Puisque $b = 8$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$. $2(x^2 + 8x + 16 - 16 + 7)$ $2(\underbrace{x^2 + 8x + 16}_{\text{Trinôme carré parfait}} - 9)$
3. établir une différence de deux carrés en factorisant le trinôme carré parfait obtenu ;	$2(\underbrace{(x + 4)^2 - 9}_{\text{Différence de deux carrés}})$
4. factoriser l'expression algébrique correspondant à une différence de deux carrés.	$2(x + 4 - 3)(x + 4 + 3)$ $2(x + 1)(x + 7)$

FONCTION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 2

Les lois des exposants permettent de transformer une règle de la forme $f(x) = a(b(x - h))^2 + k$ en une règle de la forme $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Ex. : 1) $f(x) = 2(3(x - 3))^2 + 4$

$$= 2 \times 3^2 \times (x - 3)^2 + 4$$
$$= 18(x - 3)^2 + 4$$

2) $f(x) = {}^{-}5(3x - 12)^2 + 1$

$$= {}^{-}5(3(x - 4))^2 + 1$$
$$= {}^{-}5 \times 3^2 \times (x - 4)^2 + 1$$
$$= {}^{-}45(x - 4)^2 + 1$$

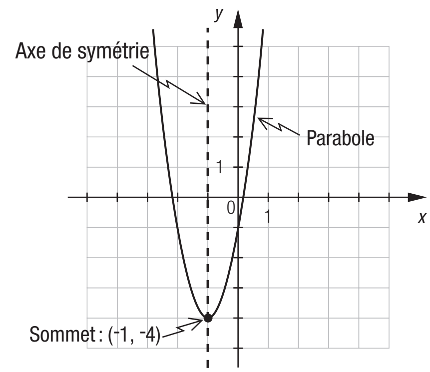
Pour une fonction polynomiale de degré 2 dont la règle s'écrit $f(x) = a(x - h)^2 + k$, où $a \neq 0$:

- pour une même variation de la variable indépendante, les variations de la variable dépendante forment une suite arithmétique car leur différence est constante ;
- la représentation graphique est une courbe nommée **parabole** ;
- la parabole est symétrique par rapport à un axe vertical ;
- le point d'intersection de la parabole et de l'axe de symétrie se nomme **sommet.**

Nom : ____________________

Groupe : ____________ Date : ____________

Ex. :

<table>
<tr><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr>
<td>$f(x) = 3(x + 1)^2 - 4$</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>y</th><th>Suite arithmétique</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>-3</td><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>-2</td><td>-1</td><td>− 9</td><td></td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>-1</td><td>-4</td><td>− 3</td><td>+ 6</td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>0</td><td>-1</td><td>+ 3</td><td>+ 6</td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>1</td><td>8</td><td>+ 9</td><td>+ 6</td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>2</td><td>23</td><td>+ 15</td><td>+ 6</td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>3</td><td>44</td><td>+ 21</td><td>+ 6</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

La règle d'une fonction polynomiale de degré 2 peut s'écrire sous différentes formes. En voici trois :

<table>
<tr><th>Forme</th><th>Règle</th><th>Caractéristique</th><th>Exemple</th></tr>
<tr><td>Canonique</td><td>$f(x) = a(x - h)^2 + k$</td><td>Abscisse du sommet : h
Ordonnée du sommet : k
Équation de l'axe de symétrie : $x = h$</td><td>$f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$</td></tr>
<tr><td>Générale</td><td>$f(x) = ax^2 + bx + c$</td><td>Abscisse du sommet : $-\frac{b}{2a}$
Ordonnée du sommet : $\frac{4ac - b^2}{4a}$
Équation de l'axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a}$
Ordonnée à l'origine : c</td><td>$f(x) = 3x^2 - 5x + 8$</td></tr>
<tr><td>Factorisée</td><td>$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</td><td>Cette forme d'écriture est possible lorsque la fonction possède un ou deux zéros.
Zéros de la fonction : x_1 et x_2</td><td>$f(x) = -4(x - 6)(x + 3)$</td></tr>
</table>

Qu'elle soit écrite sous la forme canonique, générale ou factorisée, il est possible d'exprimer la règle d'une fonction polynomiale de degré 2 sous une autre forme.

Ex. : 1) On peut exprimer la règle de la fonction $f(x) = 3x^2 - 12x - 6$ sous la forme canonique à l'aide de ses paramètres a = 3, b = -12 et c = -6.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 3 \times -6 - (-12)^2}{4 \times 3} = -18$$

La règle de la fonction peut donc s'écrire $f(x) = 3(x - 2)^2 - 18$.

2) On peut exprimer la règle de la fonction $f(x) = 2x^2 - 40x + 192$ sous la forme factorisée à l'aide de la complétion du carré.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 20x + 96) \\ &= 2(x^2 - 20x + 100 - 100 + 96) \\ &= 2(x^2 - 20x + 100 - 4) \\ &= 2((x - 10)^2 - 4) \\ &= 2(x - 10 - 2)(x - 10 + 2) \\ &= 2(x - 12)(x - 8) \end{aligned}$$

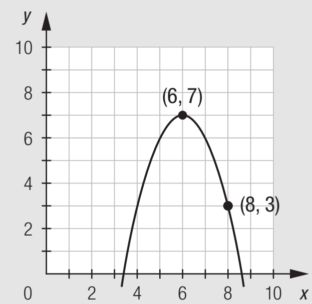
Nom : ____________________

Groupe : ____________ Date : ____________

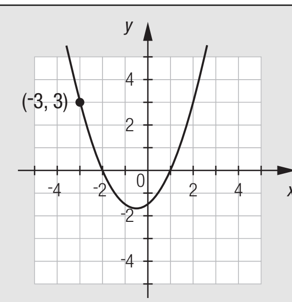
Manuel de l'élève, volume 1, p. 90

RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 2

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction polynomiale de degré 2, qui s'écrit $f(x) = \mathrm{a}(x - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$, de la façon suivante.

1. Trouver les coordonnées du sommet et d'un autre point de la courbe.	Ex. :  Les coordonnées du sommet sont (6, 7) et la courbe passe par le point (8, 3).
2. Substituer les coordonnées du sommet à h et à k ainsi que les coordonnées de l'autre point de la courbe à x et à $f(x)$ dans la règle $f(x) = \mathrm{a}(x - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$.	$3 = \mathrm{a}(8 - 6)^2 + 7$
3. Résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur du paramètre a.	$3 = \mathrm{a}(8 - 6)^2 + 7$ $^-4 = \mathrm{a} \times 2^2$ $\mathrm{a} = {}^-1$
4. Écrire la règle de la fonction obtenue.	$f(x) = {}^-(x - 6)^2 + 7$

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction polynomiale de degré 2, qui s'écrit $f(x) = \mathrm{a}(x - x_1)(x - x_2)$, où $\mathrm{a} \neq 0$, de la façon suivante.

1. Déterminer les zéros de la fonction et les coordonnées d'un point qui n'est pas situé sur l'axe des abscisses.	Ex. :  Les zéros sont $^-2$ et 1, et la courbe passe par le point ($^-3$, 3).
2. Substituer les valeurs des zéros à x_1 et à x_2 et les coordonnées du point à x et à $f(x)$ dans la règle $f(x) = \mathrm{a}(x - x_1)(x - x_2)$.	$3 = \mathrm{a}({}^-3 + 2)({}^-3 - 1)$
3. Résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur du paramètre a.	$3 = \mathrm{a}({}^-3 + 2)({}^-3 - 1)$ $3 = 4\mathrm{a}$ $\mathrm{a} = 0{,}75$
4. Écrire la règle de la fonction obtenue.	$f(x) = 0{,}75(x + 2)(x - 1)$